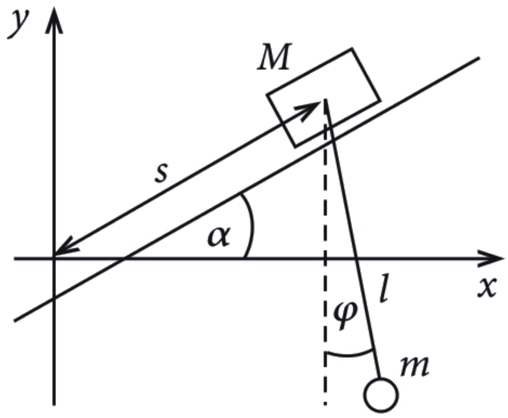
Ein Block der Masse M gleite reibungsfrei unter dem Einfluss der Schwerkraft auf einer schiefen Ebene mit Neigungswinkel α gegen die Horizontale. An seinem Schwerpunkt sei die Masse m über einen masselosen Faden der Länge l befestigt.



(a) Wie lautet die Lagrange-Funktion $\mathscr{L}(\varphi, s, \dot{\varphi}, \dot{s})$ des Systems sowie dessen Bewegungsgleichungen bzgl. s und φ?

(b) Errechnen Sie eine geschlossene Differentialgleichung für $\varphi(t)$.

(c) Geben Sie die Eigenfrequenz ω der Schwingung für $M \gg m$ und kleine Winkelausschläge ($\varphi \approx \alpha$) an und zeigen Sie, dass $\varphi(t) = \alpha + \tilde{\varphi}\sin(\omega t + \delta)$ eine gültige Lösung darstellt.

Hinweis: Zur Vereinfachung der Ergebnisse benötigen Sie die Additionstheoreme

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \; ,$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \; .$$

Endergebnisse :

(a) $\mathscr{L}(\varphi, s, \dot{\varphi}, \dot{s}) = \frac{1}{2}(M+m)\dot{s}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + ml\dot{s}\dot{\varphi}\cos(\alpha-\varphi) - (M+m)gs\sin\alpha + mgl\cos\varphi$
$\ddot{s} = -g\sin\alpha - \frac{ml}{M+m}\left[\ddot{\varphi}\cos(\alpha-\varphi) + \dot{\varphi}^2\sin(\alpha-\varphi)\right]$
$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi - \frac{\ddot{s}}{l}\cos(\alpha-\varphi)$

(b) $\ddot{\varphi} = \frac{g}{l}\cos\alpha\sin(\alpha-\varphi) + \frac{m}{M+m}\left[\ddot{\varphi}\cos^2(\alpha-\varphi) + \dot{\varphi}^2\cos(\alpha-\varphi)\sin(\alpha-\varphi)\right]$

(c) $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}\cos\alpha}$

Quelle: Aufgabe 1.2.12 (S. 51) aus W. Nolting, Grundkurs Theoretische Physik 2, Analytische Mechanik, 2011, Springer, Berlin