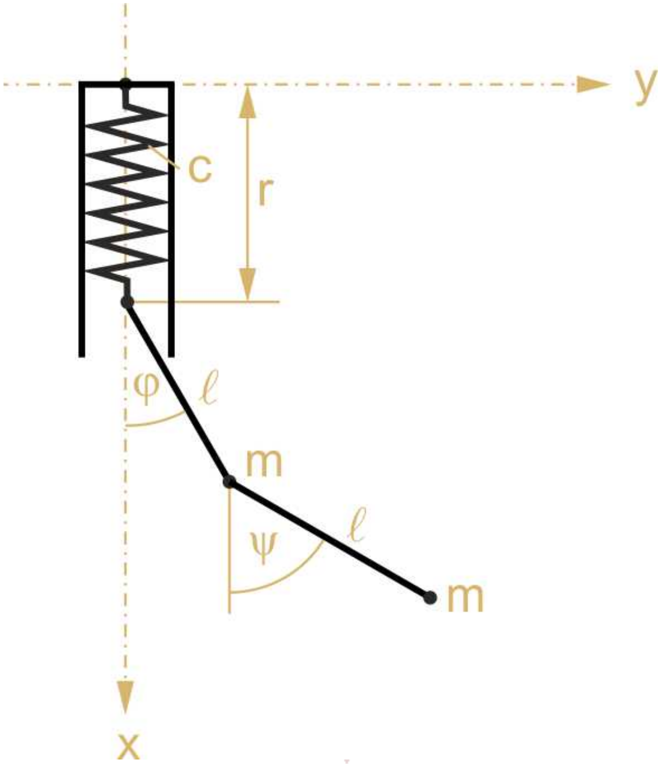
Ein mathematisches Doppelpendel ist mittels einer Feder am Koordinatenursprung aufgehängt. Die Pendelmassen seien jeweils m und die Pendellängen l. Die Federkonstante betrage c und die Feder sei in der Position $r = r_0$ vollkommen entspannt.



Ermittle für dieses System:

(a) die generalisierten Koordinaten und Geschwindigkeiten.

(b) die Lagrange Funktion $\mathscr{L}$.

(c) die Bewegungsgleichungen in allen generalisierten Koordinaten.

(d) die Periodendauer T des Systems, wenn die Pendelwinkel durch ein technisches Gebrechen plötzlich fixiert werden, d.h. $\varphi = \varphi_0 = const.$ und $\psi = \psi_0 = const.$

Endergebnisse :

(a) $x_1 = r + l\cos\varphi, \quad y_1 = l\sin\varphi$
$x_2 = r + l\cos\varphi + l\cos\psi, \quad y_2 = l\sin\varphi + l\sin\psi$
$\dot{x}_1 = \dot{r} - l\dot{\varphi}\sin\varphi, \quad \dot{y}_1 = l\dot{\varphi}\cos\varphi$
$\dot{x}_2 = \dot{r} - l\dot{\varphi}\sin\varphi - l\dot{\psi}\sin\psi, \quad \dot{y}_2 = l\dot{\varphi}\cos\varphi + l\dot{\psi}\cos\psi$

(b) $\mathscr{L}(r,\varphi,\psi,\dot{r},\dot{\varphi},\dot{\psi}) = m\left[\dot{r}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}l^2\dot{\psi}^2 - 2\dot{r}l\dot{\varphi}\sin\varphi - \dot{r}l\dot{\psi}\sin\psi + l^2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\varphi-\psi)\right] + mg\,(2r + 2l\cos\varphi + l\cos\psi) - \frac{c}{2}(r-r_0)^2$

(c) in r: $\ddot{r} - l(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi) - \frac{l}{2}(\ddot{\psi}\sin\psi + \dot{\psi}^2\cos\psi) - g + \frac{c}{2m}(r-r_0) = 0$
in φ: $\ddot{\varphi} - \frac{\ddot{r}}{l}\sin\varphi + \frac{1}{2}\left[\ddot{\psi}\cos(\varphi-\psi) + \dot{\psi}^2\sin(\varphi-\psi)\right] + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$
in ψ: $\ddot{\psi} - \frac{\ddot{r}}{l}\sin\psi + \left[\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\psi) - \dot{\varphi}^2\sin(\varphi-\psi)\right] + \frac{g}{l}\sin\psi = 0$

(d) $T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{c}}$