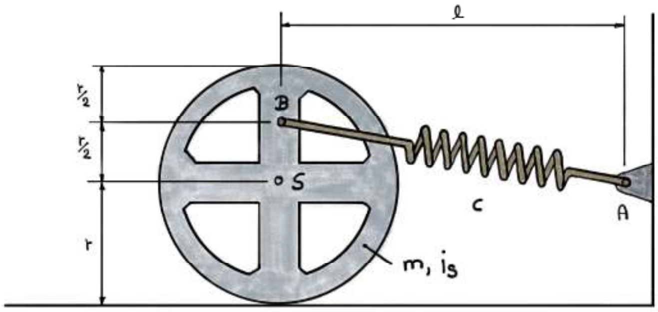
4.4 Beispiel AE04

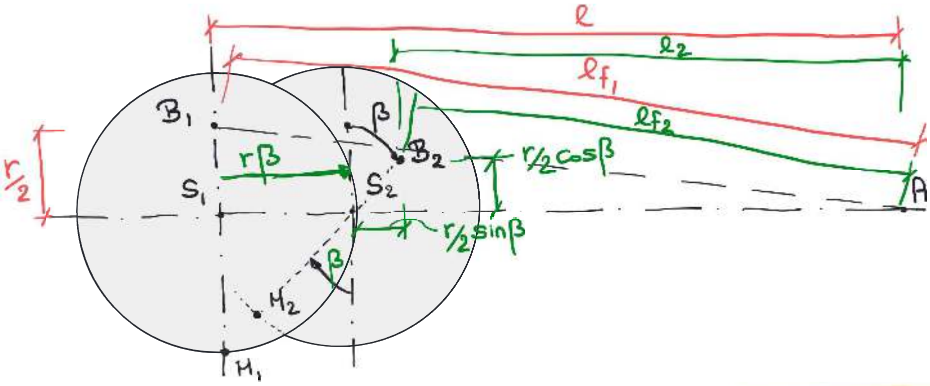
Ein Rad mit der Masse m und dem Trägheitsradius i_s rollt ohne zu gleiten. Im entspannten Zustand hat die Feder die Länge l_0 und die Federkonstante c. In der skizzierten Position wird das Rad aus der Ruhe freigegeben.
Geg.: $m = 60\text{kg}$, $i_s = 0.6\text{m}$, $r = 1\text{m}$, $l = 3\text{m}$, $l_0 = 0.5\text{m}$, $c = 10\text{N/m}$, $\beta = 60°$



Bestimmen Sie

(a) den allgemeinen Ausdruck für die Winkelgeschwindigkeit ω des Rades, nachdem es sich um den Winkel β im Uhrzeigersinn verdreht hat.

(b) den Zahlenwert für die unter (a) bestimmte Winkelgeschwindigkeit ω.



Geometrie: $l_{f_1} = \sqrt{l^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2}$, $\Delta l_{f_1} = l_{f_1} - l_0$ $\longrightarrow$ $\boxed{\Delta l_{f_1} = \sqrt{l^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} - l_0}$

$l_{f_2} = \sqrt{l_2^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 \cos^2\beta}$, $\Delta l_{f_2} = l_{f_2} - l_0$ $\longrightarrow$ $\boxed{\Delta l_{f_2} = \sqrt{\left(l - \beta r - \frac{r}{2}\sin\beta\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2\cos^2\beta} - l_0}$

$l_2 = l - \beta r - \frac{r}{2}\sin\beta$

Trägheitsmoment: $\boxed{I_M = (m i_s^2 + m r^2)}$

Energieerhaltung: $\cancel{T_1}^{=0} + U_1 = T_2 + U_2$ $U_1, U_2 \ldots$ pot. Energie d. Feder

$$U_1 = \frac{1}{2} c \,\Delta l_{f_1}^2 = \frac{1}{2} c \left[\sqrt{l^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} - l_0\right]^2$$

$$U_2 = \frac{1}{2} c \,\Delta l_{f_2}^2 = \frac{1}{2} c \left[\sqrt{\left(l - \beta r - \frac{r}{2}\sin\beta\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2\cos^2\beta} - l_0\right]^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} I_M \omega^2 = \frac{1}{2}\left(m i_s^2 + m r^2\right)\omega^2$$

Auflösen nach ω:

$$\cancel{\tfrac{1}{2}} c \left[\sqrt{l^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} - l_0\right]^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}} c \left[\sqrt{\left(l - \beta r - \frac{r}{2}\sin\beta\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2\cos^2\beta} - l_0\right]^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}}\left(i_s^2 + r^2\right) m \omega^2$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{c\left\{\left[\sqrt{l^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} - l_0\right]^2 - \left[\sqrt{\left(l - \beta r - \frac{r}{2}\sin\beta\right)^2 + \frac{r^2}{4}\cos^2\beta} - l_0\right\}}{m\left(i_s^2 + r^2\right)}}}$$

$\boxed{\omega = 0.81\,\text{s}^{-1}}$