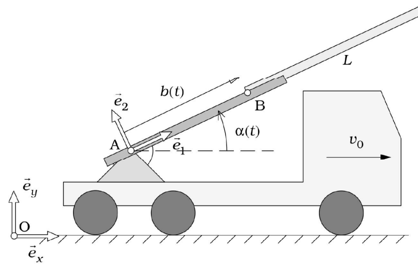
5.8 Beispiel R08

Auf einem mit der konstanten Geschwindigkeit v_0 fahrenden Fahrzeug ist eine Leiter montiert, die so bewegt wird, dass $b(t) = 2v_0t$ und $\alpha(t) = \Omega t$ gilt.



Bestimmen Sie die Absolutgeschwindigkeit sowie die Absolutbeschleunigung des Punktes C sowohl aus der Sicht einer mitfahrenden Person, d.h. im mitbewegten Koordinatensystem $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ als auch aus der Sicht eines außenstehenden Beobachters, d.h. im raumfesten Koordinatensystem $\underline{e}_x$, $\underline{e}_y$.

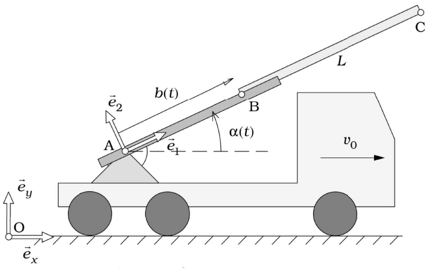
1. Möglichkeit:

Ortsvektor:
$$\underline{r} = (b(t)+L)\cos\alpha(t)\,\underline{e}_x + (b(t)+L)\sin\alpha(t)\,\underline{e}_y$$
$$= (2v_0t+L)\cos(\Omega t)\,\underline{e}_x + (2v_0t+L)\sin(\Omega t)\,\underline{e}_y$$

Geschwindigkeit:
$$\underline{v} = \underline{v}_0 + \dot{\underline{r}} = v_0\underline{e}_x + [2v_0\cos(\Omega t) - (2v_0t+L)\sin(\Omega t)\,\Omega]\,\underline{e}_x + [2v_0\sin(\Omega t) + (2v_0t+L)\cos(\Omega t)\,\Omega]\,\underline{e}_y$$

Beschleunigung:
$$\underline{a} = \dot{\underline{v}} = [-2v_0\sin(\Omega t)\Omega - 2v_0\sin(\Omega t)\Omega - (2v_0t+L)\cos(\Omega t)\Omega^2]\,\underline{e}_x$$
$$+ [2v_0\cos(\Omega t)\Omega + 2v_0\cos(\Omega t)\Omega - (2v_0t+L)\sin(\Omega t)\Omega^2]\,\underline{e}_y$$
$$\underline{a} = [-4v_0\Omega\sin(\Omega t) - (2v_0t+L)\Omega^2\cos(\Omega t)]\,\underline{e}_x + [4v_0\Omega\cos(\Omega t) - (2v_0t+L)\Omega^2\sin(\Omega t)]\,\underline{e}_y$$

Koordinatentransformation:
$$\underline{e}_1 = \underline{e}_x\cdot\cos(\alpha) + \underline{e}_y\sin(\alpha)$$
$$\underline{e}_2 = -\underline{e}_x\cdot\sin(\alpha) + \underline{e}_y\cos(\alpha)$$



$b(t) = 2v_0t$

Geschwindigkeit:
$$\underline{v}_F^{(A)} = v_0\underline{e}_x = v_0\cos(\Omega t)\,\underline{e}_1 - v_0\sin(\Omega t)\,\underline{e}_2$$
$$\underline{\omega}_F = \dot{\alpha}(t)\,\underline{e}_3 = \Omega\,\underline{e}_3$$
$$\underline{v}_{rel}^{(C)} = \dot{\underline{b}}(t) = \dot{b}(t)\,\underline{e}_1 = 2v_0\,\underline{e}_1$$
$$\underline{v}_F^{(C)} = \underline{v}_F^{(A)} + \underline{\omega}_F\times\underline{r}_{AC}$$
$$\underline{r}_{AC} = (b+L)\,\underline{e}_1$$
$$= v_0\cos(\Omega t)\,\underline{e}_1 + ((b+L)\Omega - v_0\sin(\Omega t))\,\underline{e}_2$$
$$\underline{v}_{abs}^{(c)} = [2v_0 + v_0\cos(\Omega t)]\,\underline{e}_1 + [\Omega(2v_0t+L) - v_0\sin(\Omega t)]\,\underline{e}_2$$
$$= [2v_0 + v_0\cos(\Omega t)]\cdot[\underline{e}_x\cos\alpha + \underline{e}_y\sin\alpha] + [\Omega(2v_0t+L) - v_0\sin(\Omega t)][-\underline{e}_x\sin\alpha + \underline{e}_y\cos\alpha]$$
$$= \ldots =$$
$$= v_0\underline{e}_x + [2v_0\cos(\Omega t) - (2v_0t+L)\sin(\Omega t)\,\Omega]\,\underline{e}_x + [2v_0\sin(\Omega t) + (2v_0t+L)\cos(\Omega t)\,\Omega]\,\underline{e}_y$$

Beschleunigungen:

$$\underline{\omega}_F = \dot{\alpha}(t)\,\underline{e}_3 = \Omega\,\underline{e}_3$$
$$\underline{r}_{AC} = (b+L)\,\underline{e}_1$$

$$\underline{a}_{rel} = 0$$
$$\underline{a}_F^{(c)} = \underline{a}_F^{(A)} + \dot{\underline{\omega}}_F\times\underline{r}_{AC} + \underline{\omega}_F\times\overbrace{(\underline{\omega}_F\times\underline{r}_{AC})}^{\underline{v}_F}$$
$$= \Omega\,\underline{e}_3\times(\Omega(b+L)\,\underline{e}_2) \quad (\underline{e}_3\times\underline{e}_2 = -\underline{e}_1)$$
$$\underline{a}_F^{(c)} = -\Omega^2(b(t)+L)\,\underline{e}_1$$
$$\underline{a}_c^{(c)} = 2\underline{\omega}_F\times\underline{v}_{rel}$$
$$= 2\Omega\,\underline{e}_3\times 2v_0\,\underline{e}_1$$
$$\underline{a}_c^{(c)} = 4\Omega v_0\,\underline{e}_2$$
$$\underline{a}_{abs}^{(c)} = -\Omega^2(2v_0t+L)\,\underline{e}_1 + 4\Omega v_0\,\underline{e}_2$$

$$\underline{a} = [-4v_0\Omega\sin(\Omega t) - (2v_0t+L)\Omega^2\cos(\Omega t)]\,\underline{e}_x + [4v_0\Omega\cos(\Omega t) - (2v_0t+L)\Omega^2\sin(\Omega t)]\,\underline{e}_y$$