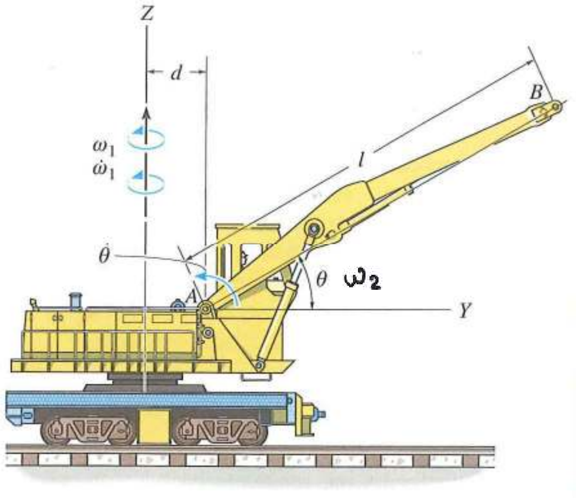
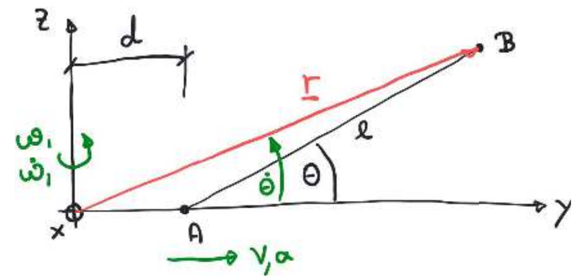
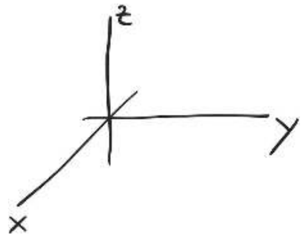
5.13 Beispiel R13

Der Eisenbahnkran lt. Skizze fährt mit der Geschwindigkeit v und der Beschleunigung a in Richtung der positiven $y-$Achse, während der Ausleger sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1 und der Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}_1$ um die $z-$Achse dreht. Im gezeichneten Augenblick (Winkellage θ) richtet sich der Ausleger mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}$ auf.
Geg.: $d = 3\text{m}$, $l = 20\text{m}$, $v = 2\text{ms}^{-1}$, $a = 1.5\text{ms}^{-2}$, $\theta = 30°$, $\omega_1 = 0.5\text{s}^{-1}$, $\dot{\omega}_1 = 3\text{s}^{-2}$, $\dot{\theta} = 3\text{s}^{-1}$



Bestimmen Sie Geschwindigkeit und Beschleunigung der Spitze B des Auslegers zum gezeichneten Zeitpunkt.





Ortsvektor: $\underline{r} = (d + l\cos\theta)\underline{e_y} + l\sin\theta\,\underline{e_z}$

Geschwindigkeit: $\underline{v_B} = \underline{v_0} + \underline{v_{rel}} + \underline{v_T}$

$= v\underline{e_y} + \underline{\dot{r}} + \underline{\omega_1} \times \underline{r}$

NR: $\underline{\omega_1} \times \underline{r} = \omega_1 \underbrace{\underline{e_z} \times \left[(d + l\cos\theta)\underline{e_y}\right.}_{\varepsilon_{zyx} = -\varepsilon_{xyz}} \left. + l\sin\theta\,\underline{e_z}\right]$

$= -\omega_1(d + l\cos\theta)\underline{e_x}$

$$\underline{v_B} = (v - l\dot{\theta}\sin\theta)\underline{e_y} + l\dot{\theta}\cos\theta\,\underline{e_z} - \omega_1(d + l\cos\theta)\underline{e_x}$$

$$\underline{v_B} = (-10.16\,\underline{e_x} - 28\,\underline{e_y} + 51.96\,\underline{e_z})\,\text{ms}^{-1}$$

Beschleunigung:

$\underline{a_B} = \underline{a_0} + \underline{a_{rel}} + \underline{a_T} + \underline{a_C}$

$= a\underline{e_y} + \underline{\ddot{r}} + \underline{\dot{\omega}_1} \times \underline{r} + \underline{\omega_1} \times (\underline{\omega_1} \times \underline{r}) + 2\underline{\omega_1} \times \underline{v_{rel}}$

$$\underline{a_B} = \left[2\omega_1 l\dot{\theta}\sin\theta - \dot{\omega}_1(d + l\cos\theta)\right]\underline{e_x} + \left[a - \omega_1^2(d + l\cos\theta) - l\dot{\theta}^2\cos\theta\right]\underline{e_y} - l\dot{\theta}^2\sin\theta\,\underline{e_z}$$

$$\underline{a_B} = (-30.96\,\underline{e_x} - 159.46\,\underline{e_y} - 90\,\underline{e_z})\,\text{ms}^{-2}$$

NR:

$\underline{\dot{\omega}_1} \times \underline{r} = \dot{\omega}_1 \underline{e_z} \times \left[(d + l\cos\theta)\underline{e_y} + l\sin\theta\,\underline{e_z}\right]$

$= -\dot{\omega}_1(d + l\cos\theta)\underline{e_x}$

$\underline{\omega_1} \times (\underline{\omega_1} \times \underline{r}) = \omega_1 \underline{e_z} \times \left[-\omega_1(d + l\cos\theta)\underline{e_x}\right]$

$= -\omega_1^2(d + l\cos\theta)\underline{e_y}$

$2\underline{\omega_1} \times \underline{v_{rel}} = 2\omega_1 \underline{e_z} \times \left[-l\dot{\theta}\sin\theta\,\underline{e_y} + l\dot{\theta}\cos\theta\,\underline{e_z}\right]$

$= 2\omega_1 l\dot{\theta}\sin\theta\,\underline{e_x}$

$\ddot{r} = (-l\overset{=0}{\ddot{\theta}}\sin\theta - l\dot{\theta}^2\cos\theta)\underline{e_y} + (l\overset{=0}{\ddot{\theta}}\cos\theta - l\dot{\theta}^2\sin\theta)\underline{e_z}$

$= -l\dot{\theta}^2\cos\theta\,\underline{e_y} - l\dot{\theta}^2\sin\theta\,\underline{e_z}$