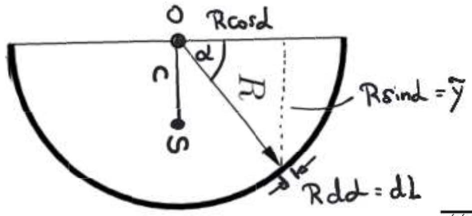
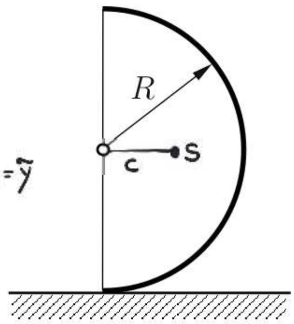
4.5 Beispiel AE05

Eine dünne Halbzylinderschale der Masse m rollt ohne zu rutschen auf einer Ebene. Die Schale wird dabei aus der dargestellten Lage aus der Ruhe losgelassen.





Schwerpunkt:

$$c = \frac{\int_L \tilde{y}\, dL}{\int_L dL} = \frac{\int_0^{\pi} (R\sin\alpha) R\, d\alpha}{\int_0^{\pi} R\, d\alpha} \rightarrow R\pi$$

$$= \frac{1}{R\pi}\int_0^{\pi} (R\sin\alpha) R\, d\alpha = \frac{R}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\alpha\, d\alpha$$

$$= \frac{R}{\pi}\left(-\cos\alpha\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{R}{\pi}\left(\underbrace{\cos(0)}_{1} - \underbrace{(\cos(\pi))}_{(-1)}\right)$$

$$c = \frac{2R}{\pi}$$

Bestimmen Sie mittels Energiemethode:

(a) die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(\varphi)$ in Abhängigkeit der Lage φ.

(b) den Winkel φ bei dem die Winkelgeschwindigkeit ihr Maximum erreicht.

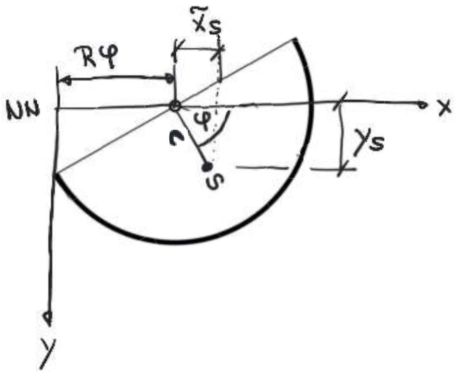
Massenträgheitsmoment:

$$I_0 = \frac{1}{2} I_0^{VZS}(2m) = \frac{1}{2} 2mR^2 = mR^2$$

$$I_S = I_0 - mc^2 = mR^2 - m\frac{4R^2}{\pi^2}$$

$$I_S = mR^2\left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right)$$

Geometrie:



$$x_S = R\varphi + c\cdot\cos\varphi = R\left(\varphi + \frac{2}{\pi}\cos\varphi\right)$$

$$y_S = c\cdot\sin\varphi = \frac{2R}{\pi}\sin\varphi$$

$$\dot{x}_S = R\dot{\varphi}\left(1 - \frac{2}{\pi}\sin\varphi\right)$$

$$\dot{y}_S = \frac{2R}{\pi}\dot{\varphi}\cos\varphi$$

Energien: $T_0 = 0,\ V_0 = 0$ ... Ausgangslage

$$T(\varphi) = \frac{1}{2} m\left(\dot{x}_S^2 + \dot{y}_S^2\right) + \frac{1}{2} I_S \dot{\varphi}^2$$

$$= \frac{1}{2} m\left[R^2\dot{\varphi}^2\left(1 - \frac{4}{\pi}\sin\varphi + \frac{4}{\pi^2}\sin^2\varphi\right) + \frac{4}{\pi^2}R^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi\right] + \frac{1}{2} mR^2\dot{\varphi}^2\left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} mR^2\dot{\varphi}^2\left[1 - \frac{4}{\pi}\sin\varphi + \frac{4}{\pi^2}\overbrace{\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)}^{1} + 1 - \frac{4}{\pi^2}\right) = mR^2\dot{\varphi}^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\sin\varphi\right)$$

$$V(\varphi) = -mg\, y_S = -mg\frac{2R}{\pi}\sin\varphi$$

Energiesatz:

$$T(\varphi) + V(\varphi) = T_0 + V_0 = 0$$

$$\cancel{m}R^{\cancel{2}}\dot{\varphi}^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\sin\varphi\right) = \frac{2\cancel{R}}{\pi}\cancel{m}g\sin\varphi$$

$$\boxed{\dot{\varphi}(\varphi) = \sqrt{\frac{2g\sin\varphi}{R(\pi - 2\sin\varphi)}}} \qquad \dot{\varphi}_{max} = \sqrt{\frac{2g}{R(\pi - 2)}}$$