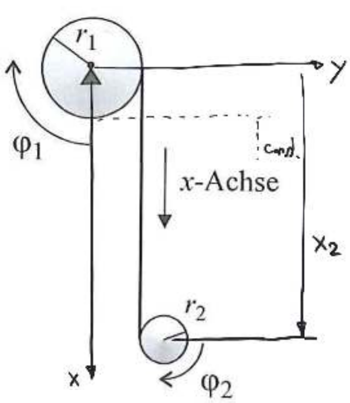
2.16 Beispiel L16

Zwei homogene Zylinder mit Massen m_1, m_2 und Radien r_1, r_2 sind mit einem Faden umwickelt. Die Achse des Zylinders 1 ist reibungsfrei gelagert. Der Zylinder 2 fällt im Schwerefeld senkrecht nach unten.



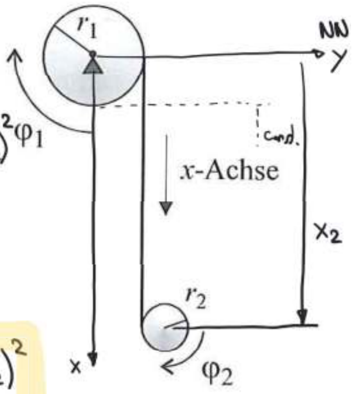
Z.B.: $x_2 = (\text{const.} +) r_1\varphi_1 + r_2\varphi_2$

gen. Koord.: φ_1, φ_2

Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf und berechnen Sie die Fadenkraft.

Kinetische Energie:

$$T = \frac{I_1 \dot\varphi_1^2}{2} + \frac{I_2 \dot\varphi_2^2}{2} + \frac{1}{2} m_2 \dot x_2^2$$
$$= \frac{1}{4} m_1 r_1^2 \dot\varphi_1^2 + \frac{1}{4} m_2 r_2^2 \dot\varphi_2^2 + \frac{1}{2} m_2 (r_1\dot\varphi_1 + r_2\dot\varphi_2)^2$$



Z.B.: $x_2 = (\text{const.} +) r_1\varphi_1 + r_2\varphi_2$
$\dot x_2 = r_1\dot\varphi_1 + r_2\dot\varphi_2$

gen. Koord.: φ_1, φ_2

HTM: $I_1 = \frac{1}{2} m_1 r_1^2$
$I_2 = \frac{1}{2} m_2 r_2^2$

Pot. Energie:

$$U = -m_2 g x_2 = -m_2 g (r_1\varphi_1 + r_2\varphi_2)$$

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{4} m_1 r_1^2 \dot\varphi_1^2 + \frac{1}{4} m_2 r_2^2 \dot\varphi_2^2 + \frac{1}{2} m_2 (r_1\dot\varphi_1 + r_2\dot\varphi_2)^2 + m_2 g (r_1\varphi_1 + r_2\varphi_2)}$$

Bewegungsglg.:

φ_1: $d_t(\partial_{\dot\varphi_1}\mathcal{L}) - \partial_{\varphi_1}\mathcal{L} = 0$

$$\left.\begin{aligned} &d_t\left[\frac{2}{4} m_1 r_1^2 \dot\varphi_1 + m_2 (r_1\dot\varphi_1 + r_2\dot\varphi_2) r_1\right] - m_2 g r_1 = 0 \\ &\frac{1}{2} m_1 r_1^{\cancel{2}} \ddot\varphi_1 + m_2 r_1^{\cancel{2}} \ddot\varphi_1 + m_2 \cancel{r_1} r_2 \ddot\varphi_2 - m_2 g \cancel{r_1} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) r_1 \ddot\varphi_1 + m_2 r_2 \ddot\varphi_2 - m_2 g = 0 \quad (1)$$

φ_2: $d_t(\partial_{\dot\varphi_2}\mathcal{L}) - \partial_{\varphi_2}\mathcal{L} = 0$

$$\left.\begin{aligned} &d_t\left[\frac{2}{4} m_2 r_2^2 \dot\varphi_2 + m_2 (r_1\dot\varphi_1 + r_2\dot\varphi_2) r_2\right] - m_2 g r_2 = 0 \\ &\frac{2}{4} m_2 r_2^{\cancel{2}} \ddot\varphi_2 + m_2 r_1 \cancel{r_2} \ddot\varphi_1 + m_2 r_2^{\cancel{2}} \ddot\varphi_2 - m_2 g \cancel{r_2} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \frac{3}{2} m_2 r_2 \ddot\varphi_2 + m_2 r_1 \ddot\varphi_1 - m_2 g = 0 \quad (2)$$

aus (1): $\ddot\varphi_2 = \frac{g}{r_2} - \frac{m_1 + 2m_2}{2m_2 r_2} r_1 \ddot\varphi_1$ (3)

(3) in (2): $\ddot\varphi_1 = \frac{2m_2 g}{(3m_1 + 2m_2) r_1}$ (*)

in (3): $\ddot\varphi_2 = \frac{2m_1 g}{(3m_1 + 2m_2) r_2}$

Fadenkraft:

Auf Zylinder 1 wirkt Drehmoment: $M_1 = F r_1$ (Fadenkraft)

& : $M_1 = I_1 \ddot\varphi_1$ (*)

$$\rightarrow F = \frac{M_1}{r_1} = \frac{I_1 \ddot\varphi_1}{r_1} = \frac{m_1 r_1^{\cancel{2}}}{\cancel{2}} \frac{1}{\cancel{r_1}} \frac{\cancel{2} m_2 g}{(3m_1 + 2m_2) \cancel{r_1}}$$

$$\boxed{F = \frac{m_1 m_2}{3m_1 + 2m_2} g}$$