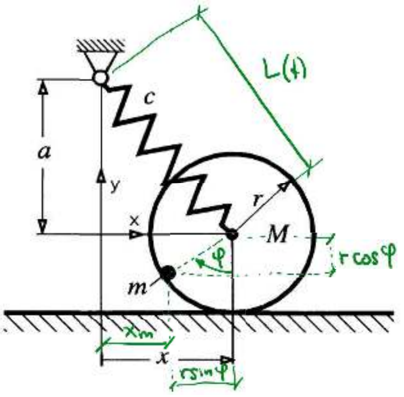
2.17 Beispiel L17

Eine in der skizzierten Weise federnd aufgehängte, homogene Kreisscheibe mit Masse M und Radius r rollt auf einer waagrechten Unterlage ohne zu gleiten. Am Umfang der Scheibe befindet sich eine als Punktmasse anzusehende Unwucht der Masse m. Für $x = 0$ ist die Feder mit Federkonstante c vollkommen entspannt und die Unwucht befindet sich senkrecht unter dem Scheibenschwerpunkt.



Koordinaten:

$x_M = x$, $x_m = x - r\sin\varphi$

$y_M = 0$, $y_m = -r\cos\varphi$

Geschwindigkeiten:

$\dot{x}_M = \dot{x}$, $\dot{x}_m = \dot{x} - r\dot{\varphi}\cos\varphi$

$\dot{y}_M = 0$, $\dot{y}_m = r\dot{\varphi}\sin\varphi$

$I_S = \frac{1}{2} M r^2$

Rollbedingung (zB):

$\varphi = \frac{x}{r}$, $\dot{\varphi} = \frac{\dot{x}}{r}$

Bestimmen Sie für dieses System:

(a) die generalisierte Koordinate und Geschwindigkeit.

(b) die kinetische Energie T und die potentielle Energie V des Systems sowie dessen Lagrange Funktion.

(c) die Bewegungsgleichung mit Hilfe der Euler-Lagrange Gleichung.

(d) die vereinfachte Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen x, also $x/r << 1$ und $x/a << 1$.

Kinetische Energie:

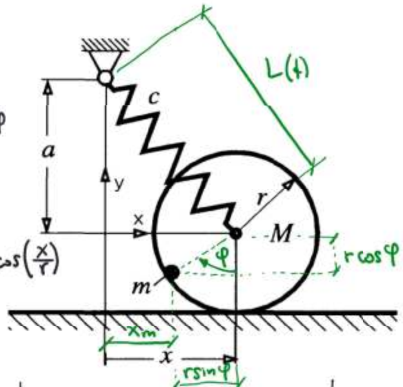
$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I_S \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2\right)$$

$$= \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{4} M r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m \big(\dot{x}^2 - 2\dot{x}\dot{\varphi} r\cos\varphi + \underbrace{r^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi}_{r^2\dot{\varphi}^2}\big)$$

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{4} M \cancel{r^2} \frac{\dot{x}^2}{\cancel{r^2}} + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - m\dot{x}\cancel{r}\frac{\dot{x}}{\cancel{r}}\cos\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{1}{2} m \cancel{r^2} \frac{\dot{x}^2}{\cancel{r^2}}$$

$$T = \left[\frac{3}{4} M + m\left(1 - \cos\frac{x}{r}\right)\right] \dot{x}^2$$

$$\boxed{T = \left[\frac{3}{4} M + 2m \sin^2\frac{x}{2r}\right] \dot{x}^2}$$



Koordinaten:

$x_M = x$, $x_m = x - r\sin\varphi$

$y_M = 0$, $y_m = -r\cos\varphi$

Geschwindigkeiten:

$\dot{x}_M = \dot{x}$, $\dot{x}_m = \dot{x} - r\dot{\varphi}\cos\varphi$

$\dot{y}_M = 0$, $\dot{y}_m = r\dot{\varphi}\sin\varphi$

$I_S = \frac{1}{2} M r^2$

Rollbedingung (zB):

$\varphi = \frac{x}{r}$, $\dot{\varphi} = \frac{\dot{x}}{r}$

NB: $\cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$

$\sin\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$

Potentielle Energie:

$$V = m g y_m + \frac{1}{2} c (\Delta L)^2 \quad \text{mit} \quad (\Delta L)^2 = (L - a)^2 = \left(\sqrt{a^2 + x^2} - a\right)^2 = a^2\left(\sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} - 1\right)^2$$

$$\boxed{V = -mgr\cos\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{1}{2} c a^2 \left(\sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} - 1\right)^2}$$

Lagrangefunktion:

$$\boxed{\mathcal{L} = \left[\frac{3}{4} M + 2m\sin^2\frac{x}{2r}\right]\dot{x}^2 + mgr\cos\left(\frac{x}{r}\right) - \frac{1}{2} c a^2 \left(\sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} - 1\right)^2}$$

Bewegungsgleichung:

$$d_t\left(\partial_{\dot{x}} \mathcal{L}\right) - \partial_x \mathcal{L} = 0$$

$$d_t\left[\left(\frac{3}{2} M + 4m\sin^2\left(\frac{x}{2r}\right)\right)\dot{x}\right] - \left[4m\sin\left(\frac{x}{2r}\right)\cos\left(\frac{x}{2r}\right)\frac{1}{2r}\dot{x}^2 - mg\cancel{r}\sin\left(\frac{x}{r}\right)\frac{1}{\cancel{r}} - \frac{1}{2} c a^2\, 2\left(\sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} - 1\right)\left(\frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^{-1/2} 2\left(\frac{x}{a}\right)\frac{1}{a}\right)\right] = 0$$

$$\boxed{\left[\frac{3}{2} M + 4m\sin^2\left(\frac{x}{2r}\right)\right]\ddot{x} + \frac{2m}{r}\dot{x}^2\sin\left(\frac{x}{2r}\right)\cos\left(\frac{x}{2r}\right) + mg\cancel{r}\sin\left(\frac{x}{r}\right) + cx\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}}\right) = 0}$$

Näherung:

$\frac{x}{r} << 1$; $\frac{x}{a} << 1$ $\qquad \sin^2\varphi \to 0$, $\sin\varphi \to \varphi$, $\cos\varphi \to 1$ $\qquad \sqrt{1 + \cancel{\left(\frac{x}{a}\right)^2}} =$

$$\boxed{\frac{3}{2} M \ddot{x} + mg\frac{x}{r} = 0} \qquad \boxed{\ddot{x} + \frac{2mg}{3Mr} x = 0}$$