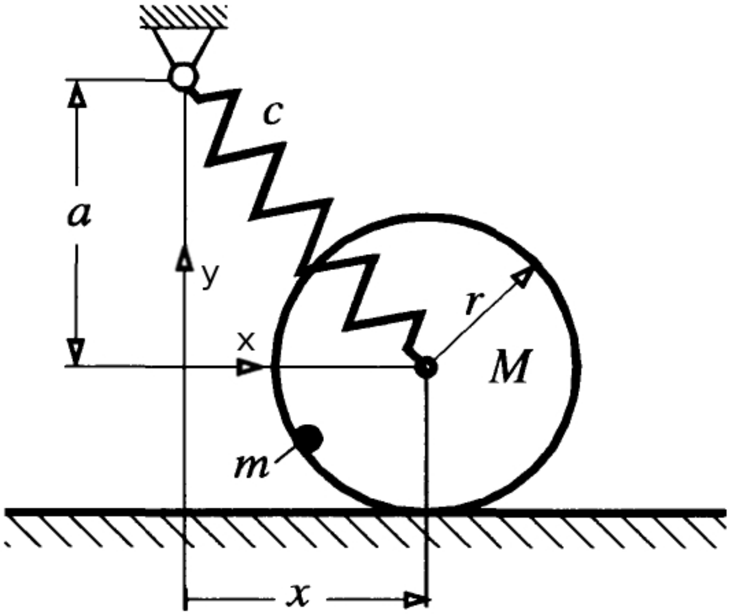
Eine in der skizzierten Weise federnd aufgehängte, homogene Kreisscheibe mit Masse M und Radius r rollt auf einer waagrechten Unterlage ohne zu gleiten. Am Umfang der Scheibe befindet sich eine als Punktmasse anzusehende Unwucht der Masse m. Für $x = 0$ ist die Feder mit Federkonstante c vollkommen entspannt und die Unwucht befindet sich senkrecht unter dem Scheibenschwerpunkt.



Bestimmen Sie für dieses System:

(a) die generalisierte Koordinate und Geschwindigkeit.

(b) die kinetische Energie T und die potentielle Energie V des Systems sowie dessen Lagrange Funktion.

(c) die Bewegungsgleichung mit Hilfe der Euler-Lagrange Gleichung.

(d) die vereinfachte Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen x, also $x/r << 1$ und $x/a << 1$.

TECHNISCHE MECHANIK
ANSCHAULICH ERKLÄRT

Endergebnisse:

(a) $x_M = x,\ x_m = x - r\sin\varphi$
$y_M = 0,\ y_m = -r\cos\varphi$
$\dot{x}_M = \dot{x},\ \dot{x}_m = \dot{x} - r\dot{\varphi}\cos\varphi$
$\dot{y}_M = 0,\ \dot{y}_m = r\dot{\varphi}\sin\varphi$

(b) $T = \left[\frac{3}{4}M + 2m\sin^2\frac{x}{2r}\right]\dot{x}^2$

$V = -mgr\cos\frac{x}{r} + \frac{1}{2}ca^2\left(\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} - 1\right)^2$

$\mathscr{L}(\dot{x}, x) = \left[\frac{3}{4}M + 2m\sin^2\frac{x}{2r}\right]\dot{x}^2 + mgr\cos\frac{x}{r} - \frac{1}{2}ca^2\left(\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} - 1\right)^2$

(c) $\left[\frac{3}{2}M + 4m\sin^2\frac{x}{2r}\right]\ddot{x} + \frac{2m}{r}\dot{x}^2\sin\frac{x}{2r}\cos\frac{x}{2r} + mg\sin\frac{x}{r} + cx\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\right) = 0$

(d) $\ddot{x} + \frac{2mg}{3Mr}x = 0$