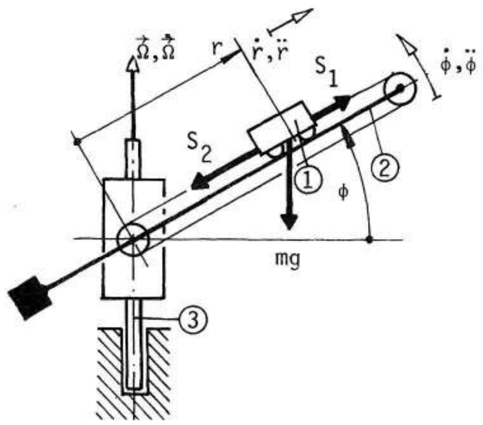
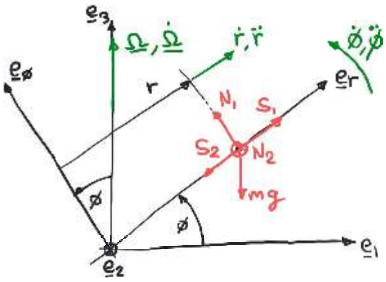
## 5.12 Beispiel R12

Ein Drehkran laut Skizze ist gegeben. Der Wagen (1) darf näherungsweise als Punktmasse $m$ betrachtet werden, deren Ortsvektor $\underline{r}$, Geschwindigkeit $\dot{\underline{r}}$ und Beschleunigung $\ddot{\underline{r}}$ gegeben sind, und die zudem abhebesicher und reibungsfrei geführt ist. Der Schwenkarm (2) bewegt sich entlang des Winkels $\phi$ mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}$ und der Winkelbeschleunigung $\ddot{\phi}$. Die Drehsäule (3) rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit $\Omega$ und der Winkelbeschleunigung $\dot{\Omega}$.




Ges.:

(a) Die Differenz der Seilkräfte $S_2 - S_1$.

(b) Die Kraft des Schwenkarmes auf den Wagen.

Im $\underline{e}_r - \underline{e}_2 - \underline{e}_\phi$ $(\mathcal{E}_{r2\phi})$

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underbrace{\dot{\underline{r}} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{v}_{rel}}, \quad \underbrace{\ddot{\underline{r}} = \begin{pmatrix} \ddot{r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{a_{rel}}$$

$$\underline{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega \sin\phi \\ -\dot{\phi} \\ \Omega \cos\phi \end{pmatrix}, \quad \dot{\underline{\Omega}} = \begin{pmatrix} \dot{\Omega} \sin\phi + \Omega \dot{\phi} \cos\phi \\ -\ddot{\phi} \\ \dot{\Omega} \cos\phi - \Omega \dot{\phi} \sin\phi \end{pmatrix}$$

Führungsbeschleunigung:

$$\underline{a}_F = \dot{\underline{\Omega}} \times \underline{r} + \underline{\Omega} \times \overbrace{(\underline{\Omega} \times \underline{r})}^{\underline{v}_F}$$
$$= \left[ (\dot{\Omega} \sin\phi + \Omega \dot{\phi} \cos\phi) \underline{e}_r - \ddot{\phi} \underline{e}_2 + (\dot{\Omega} \cos\phi - \Omega \dot{\phi} \sin\phi) \underline{e}_\phi \right] \times r \underline{e}_r$$
$$+ \underline{\Omega} \times \left[ \Omega \sin\phi \underline{e}_r - \dot{\phi} \underline{e}_2 + \Omega \cos\phi \underline{e}_\phi \right] \times r \underline{e}_r$$
$$= \ddot{\phi} r \underline{e}_\phi + (\dot{\Omega} \cos\phi - \Omega \dot{\phi} \sin\phi) r \underline{e}_2$$
$$+ \left[ \Omega \sin\phi \underline{e}_r - \dot{\phi} \underline{e}_2 + \Omega \cos\phi \underline{e}_\phi \right] \times \left[ \dot{\phi} r \underline{e}_\phi + \Omega \cos\phi \, r \underline{e}_2 \right]$$
$$= \ddot{\phi} r \underline{e}_\phi + (\dot{\Omega} \cos\phi - \Omega \dot{\phi} \sin\phi) r \underline{e}_2$$
$$+ \left[ -\Omega \dot{\phi} r \sin\phi \underline{e}_2 + \Omega^2 r \sin\phi \cos\phi \underline{e}_\phi - \dot{\phi}^2 r \underline{e}_r - \Omega^2 r \cos^2\phi \underline{e}_r \right]$$

$$\underline{a}_F = (-\dot{\phi}^2 r - \Omega^2 r \cos^2\phi) \underline{e}_r + (\dot{\Omega} r \cos\phi \underbrace{- \Omega r \dot{\phi} \sin\phi - \Omega r \dot{\phi} \sin\phi}_{-2\Omega r \dot{\phi} \sin\phi}) \underline{e}_2 + (\ddot{\phi} r + \Omega^2 r \sin\phi \cos\phi) \underline{e}_\phi$$

Coriolisbeschleunigung:

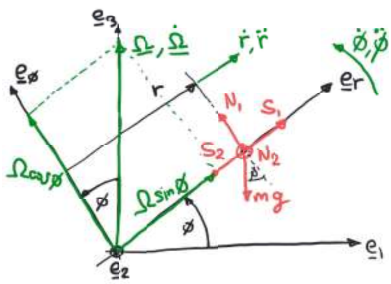
$$\underline{a}_C = 2 \underline{\Omega} \times \underline{v}_{rel} = 2 (\Omega \sin\phi \underline{e}_r - \dot{\phi} \overbrace{\underline{e}_2 + \Omega \cos\phi \underbrace{\underline{e}_\phi) \times \dot{r} \underline{e}_r}_{\underline{e}_2}}^{-\underline{e}_\phi}$$

$$\underline{a}_C = +2 \dot{\phi} \dot{r} \underline{e}_\phi + 2 \Omega \dot{r} \cos\phi \underline{e}_2$$

Gesamtbeschleunigung:

$$\underline{a}_P = \left[ \ddot{r} - \dot{\phi} r - \Omega^2 r \cos\phi \right] \underline{e}_r + \left[ \dot{\Omega} r \cos\phi - 2 \Omega r \dot{\phi} \sin\phi + 2 \Omega \dot{r} \cos\phi \right] \underline{e}_2 + \left[ \ddot{\phi} r + \Omega^2 r \sin\phi \cos\phi + 2 \dot{\phi} \dot{r} \right] \underline{e}_\phi$$

Schwerpunktsatz: $\sum \underline{F} = m \underline{a}_P$




$\underline{e}_r$: $m \left[ \ddot{r} - \dot{\phi} r - \Omega^2 r \cos\phi \right] = S_1 - S_2 - mg \sin\phi$

$\underline{e}_2$: $m \left[ \dot{\Omega} r \cos\phi - 2 \Omega r \dot{\phi} \sin\phi + 2 \Omega \dot{r} \cos\phi \right] = N_2$

$\underline{e}_\phi$: $m \left[ \ddot{\phi} r + \Omega^2 r \sin\phi \cos\phi + 2 \dot{\phi} \dot{r} \right] = N_1 - mg \cos\phi$

$$\Longrightarrow \quad S_1 - S_2 = m (g \sin\phi + \ddot{r} - r \dot{\phi}^2 - \Omega^2 r \cos^2\phi)$$
$$N_1 = m (\ddot{\phi} r + \Omega^2 r \sin\phi \cos\phi + 2 \dot{\phi} \dot{r} + g \cos\phi)$$