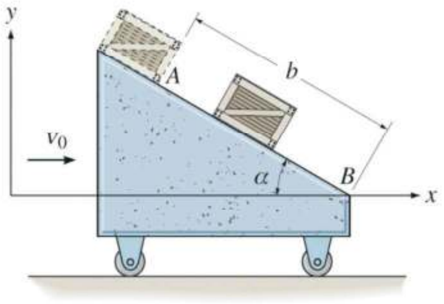
5.15 Beispiel R15

Eine Kiste der Masse m gleitet reibungsfrei die geneigte Rampe der Masse m_2 entlang, während diese reibungsfrei entlang der horizontalen x-Achse rollen kann. Zum Anfangszeitpunkt $t_0 = 0$ bewegt sich die Rampe mit der konstanten Geschwindigkeit v_0 nach rechts, während die Kiste ausgehend vom Punkt A zu gleiten beginnt.

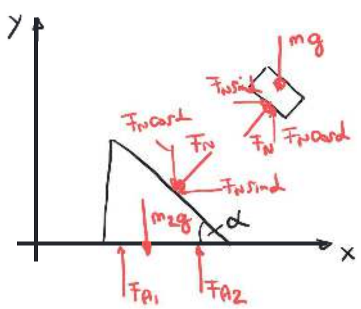


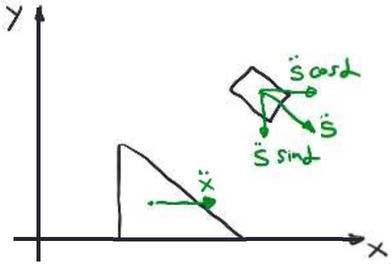
Bestimmen Sie

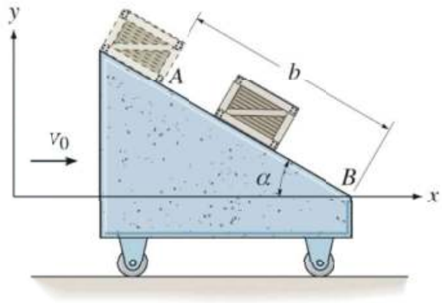
(a) die Beschleunigungen der Kiste und der Rampe.

(b) die Geschwindigkeiten von Kiste und Rampe zu jenem Zeitpunkt an dem die Kiste den Punkt B erreicht hat.

(c) die Verschiebung der Rampe, wenn die Kiste den Punkt B erreicht hat.







Rampe:

e_x: $\quad -F_N \sin\alpha = m_2 \ddot{x} \qquad (1)$

e_y: $\quad F_{A_1} + F_{A2} - m_2 g - F_N \cos\alpha = 0 \qquad (2)$

Kiste:

e_x: $\quad F_N \sin\alpha = m \ddot{s} \cos\alpha + m\ddot{x} \qquad (3)$

e_y: $\quad F_N \cos\alpha - mg = -m\ddot{s}\sin\alpha \qquad (4)$

aus (1): $\ddot{x} = -\frac{F_N \sin\alpha}{m_2}$

in (3): $F_N \sin\alpha = m\ddot{s}\cos\alpha - m\frac{F_N \sin\alpha}{m_2} \qquad (3^*)$

aus (4): $F_N = \frac{mg - m\ddot{s}\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad (4^*)$

(4^*) in (3^*): $(mg - m\ddot{s}\sin\alpha)\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = m\ddot{s}\cos\alpha - \frac{m}{m_2}(mg - m\ddot{s}\sin\alpha)\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

⋮

$$\ddot{s} = \frac{m + m_2}{m_2 + m\sin^2\alpha} g \sin\alpha$$

aus (4^*): $F_N = \frac{mg}{\cos\alpha}\left[1 - \frac{m + m_2}{m_2 + m\sin^2\alpha}\sin^2\alpha\right]$

aus (1): $\ddot{x} = -\frac{\sin\alpha}{m_2}\frac{mg}{\cos\alpha}\left[1 - \frac{m + m_2}{m_2 + m\sin^2\alpha}\sin^2\alpha\right]$

b) Zeit bis B:

$b = s = \underbrace{s_0}_{=0} + \underbrace{\dot{s}_0 t}_{=0} + \frac{1}{2}\ddot{s}t_f^2 \rightarrow t_f = \sqrt{\frac{2b}{\ddot{s}}}$

$\dot{s} = \int_0^{t_f} \ddot{s}\,dt = \ddot{s}t_f = \ddot{s}\sqrt{\frac{2b}{\ddot{s}}} \rightarrow \dot{s} = \sqrt{2b\ddot{s}}$ im Fahrzeugsystem

c) Rampe

$\dot{x} = V_0 + \ddot{x}t_f = V_0 + \ddot{x}\sqrt{\frac{2b}{\ddot{s}}}$

$x = V_0 t_f + \frac{1}{2}\ddot{x}t_f^2 = V_0\sqrt{\frac{2b}{\ddot{s}}} + b\frac{\ddot{x}}{\ddot{s}}$