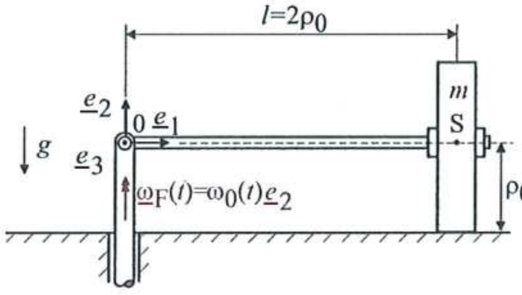
6.4 Beispiel K04

Eine Kollermühle besteht aus einer drehbar gelagerten, dünnen Kreisscheibe (Masse m, Radius ρ_0), die über einen masselosen Stab der Länge $l = 2\rho_0$ aus der Ruhelage mit konstanter Winkelbeschleunigung α beschleunigt wird, wobei gilt $\omega_0(t) = \alpha t$.



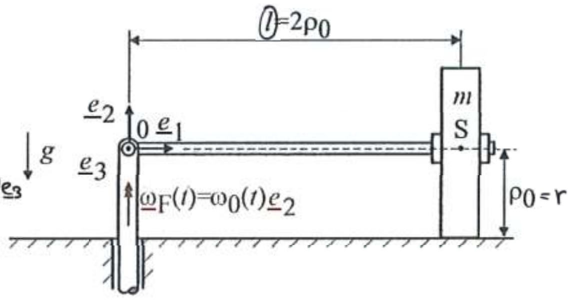
Bestimmen Sie für reines Rollen zwischen Scheibe und Unterlage:

(a) das erforderliche äußere Moment $\underline{M}$ im mit der Scheibe mitrotierenden körperfesten Koordinatensystem $\underline{e}_1$-$\underline{e}_2$-$\underline{e}_3$.

(b) die Zeit t_1, bei der die Anpresskraft zwischen Scheibe und Unterlage $F_N = 2mg$ beträgt.

(c) den erforderlichen minimalen Reibungskoeffizienten μ zwischen Scheibe und Unterlage, sodass während des gesamten Beschleunigungsvorganges reines Rollen sichergestellt ist.

Drehimpuls: $\underline{L} = \underline{\underline{I}} \cdot \underline{\omega}$



Trägheitstensor:

$$\underline{\underline{I}} = I_1 \underline{e}_1 + \left(I_2 + m l^2\right)\underline{e}_2 + \left(I_3 + m l^2\right)\underline{e}_3$$

$$= \frac{m\rho_0^2}{2}\underline{e}_1 + \left(\frac{m\rho_0^2}{4} + m4\rho_0^2\right)\underline{e}_2 + \left(\frac{m\rho_0^2}{4} + m4\rho_0^2\right)\underline{e}_3$$

$$\underline{\underline{I}} = \frac{m\rho_0^2}{2}\underline{e}_1 + \frac{17 m\rho_0^2}{4}\underline{e}_2 + \frac{17 m\rho_0^2}{4}\underline{e}_3$$

Winkelgeschwindigkeit:

$$\underline{\omega} = \omega_1 \underline{e}_1 + \omega_2 \underline{e}_2 + \omega_3 \underline{e}_3$$

mit $\underline{\omega}_F \times \underline{l} = \underline{\omega} \times \underline{r}$

$$\omega_0 \underline{e}_2 \times 2\rho_0 \underline{e}_1 = \omega_1 \underline{e}_1 \times \rho_0 \underline{e}_2$$

$$-\omega_0 2\cancel{\rho_0} = \omega_1 \cancel{\rho_0}$$

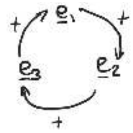
$$\omega_1 = -2\omega_0$$
$$\omega_2 = \omega_0$$
$$\omega_3 = 0$$

$$\underline{\omega} = -2\omega_0 \underline{e}_1 + \omega_0 \underline{e}_2$$

$$\underline{L} = \underline{\underline{I}} \cdot \underline{\omega}$$

$$\underline{L} = -\frac{m\rho_0^2}{\cancel{2}}\cancel{2}\omega_0 \underline{e}_1 + \frac{17 m\rho_0^2}{4}\omega_0 \underline{e}_2$$

$$\underline{L} = -m\rho_0^2\omega_0 \underline{e}_1 + \frac{17 m\rho_0^2}{4}\omega_0 \underline{e}_2$$



Drehimpulssatz:

$$\underline{M} = \mathring{\underline{L}}$$

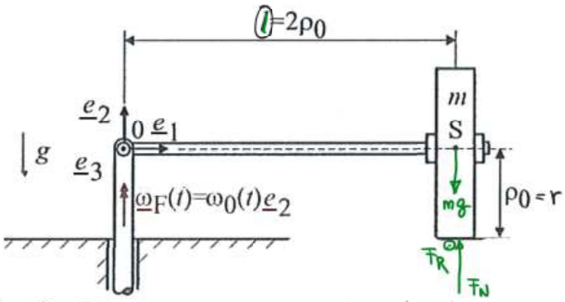
$$\mathring{\underline{L}} = \frac{\partial \underline{L}}{\partial t} + \underline{\omega}_F \times \underline{L} = -m\rho_0^2\dot{\omega}_0 \underline{e}_1 + \frac{17 m\rho_0^2}{4}\dot{\omega}_0 \underline{e}_2 + \omega_0 \overbrace{\underline{e}_2 \times \left(-m\rho_0^2\omega_0 \underline{e}_1\right.}^{-\underline{e}_3} + \overbrace{\left.\frac{17 m\rho_0^2}{4}\omega_0 \underline{e}_2\right)}^{0}$$

$$= -m\rho_0^2\dot{\omega}_0 \underline{e}_1 + \frac{17 m\rho_0^2}{4}\dot{\omega}_0 \underline{e}_2 + m\rho_0^2\omega_0^2 \underline{e}_3 \quad ✓$$

$\omega_0 = \alpha t \rightarrow \omega_0^2 = \alpha^2 t^2$

$$\mathring{\underline{L}} = -m\rho_0^2\alpha\left[\underline{e}_1 + \frac{17}{4}\underline{e}_2 - \alpha t^2 \underline{e}_3\right] = \underline{M}$$

b) Zeit (t_1) zu der $F_N = 2mg$:



$$\left.\begin{aligned} M_3(t)\underline{e}_3 &= 2\rho_0\left(F_N - mg\right)\underline{e}_3 \\ M_3(t) &= \underline{M} \cdot \underline{e}_3 = m\rho_0^2\alpha^2 t^2 \end{aligned}\right\}$$

$$m\rho_0^{\cancel{2}}\alpha^2 t^2 = 2\cancel{\rho_0}\left(F_N - mg\right)$$

$$F_N = \frac{m\rho_0\alpha^2 t^2}{2} + mg \stackrel{!}{=} 2mg$$

$$\frac{\rho_0\alpha^2 t^2}{2} t_1^2 = g \quad \longrightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{2g}{\rho_0\alpha^2}} = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{2g}{\rho_0}}$$

phys. Dim.: $\frac{1}{s^{-2}}\sqrt{\frac{\cancel{m}}{s^2 \cdot \cancel{m}}} = \frac{s^{\cancel{2}}}{\cancel{s}} = s$ ✓

c) μ für reines Rollen

Moment um $\underline{e}_1$

$$M_1(t) = -\rho_0 F_R \longrightarrow -m\rho_0^{\cancel{2}}\alpha = -\cancel{\rho_0}F_R$$

$$F_R = m\rho_0\alpha$$

reines Rollen: $|F_R| \leq |\mu F_N|$

aus (b) $F_N \propto t^2$, also $t = 0$ ist kritisch, $F_N = mg$

$$\rightarrow \mu \geq \frac{|F_R|}{|mg|} = \frac{\cancel{m}\rho_0\alpha}{\cancel{m}g} \longrightarrow \boxed{\mu \geq \frac{\rho_0\alpha}{g}}$$